Montag

1) Rechnen mit Variablen und Funktionen

1.1 Rechenregeln 1

Vertauschungsgesetz:

Klammerregeln: i)

ii)

Anwendung: "Ausmultiplizieren"

-> 1. binomische Formel

analog: 2. binomische Formel

Multiplizieren Sie aus

-> 3. binomische Formel

Multiplizieren Sie aus

Beim Rechnen ist oft auch die Umkehrung des Ausmultiplizierens hilfreich, das "Ausklammern", z.B.

Vereinfachen Sie

Vereinfachen Sie (durch Ausklammern)

1.2 Regeln 2: Brüche

i)

ii)

iii)

Da ist

d.h. man verändert einen Bruch nicht, wenn man Zähler (obere Zahl) und Nenner (untere Zahl) mit der gleichen Zahl multipliziert ("Erweitern") oder durch die gleiche Zahl teilt ("Kürzen")

Anwendung: Addition von Brüchen mit verschiedenen Nennern

Beispiel:
Vereinfachen

Vereinfachen Sie

Zeigen Sie durch Umformung der linken Seite, dass

1.3 Regeln 3: Umformungen von Gleichungen

Bei Gleichungen, z.B.

sind folgende Umformungen erlaubt:

i) Addieren (Subtrahieren) der gleichen Zahl auf beiden Seiten (der Gleichung)

ii) Multiplikation mit (Division durch) der gleichen Zahl auf beide Seiten

Gleichungen dürfen auf beiden Seiten invertiert werden, denn

weitere Umformungsregeln: später

Beispiel:

Löse nach x auf, d.h. bringe die Gleichung auf die Form

so dass die rechte Seite nicht mehr von x abhängt.

Einmal sehr ausführlich:

Wenn man penibel sein will, prüft man am Ende noch, ob man irgendwo mit oder multipliziert hat

i)

also: muss erfüllt sein

ii)

Lösen Sie

nach x auf

Lösen Sie

nach V auf

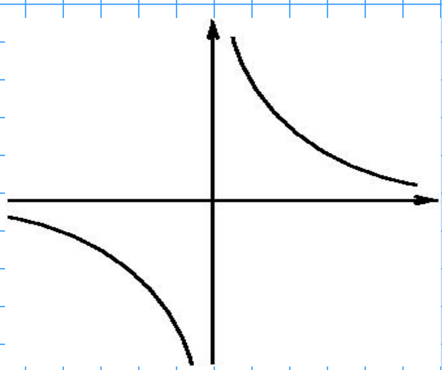
1.4 Funktionen und Umkehrfunktionen

Eine "Funktion" ist eine Zahl y, die von einer "Variablen" (hier x) abhängt, z.B.

z.B.:

Jede Funktion hat einen "Definitionsbereich", also die Menge der Zahlen x, für die y(x) eine definierte Zahle ergibt, z.B. darf man in alle Zahlen außer einsetzen

Eine Funktion lässt sich in einem zwei-dimensionalen Koordinatensystem darstellen, z.B.

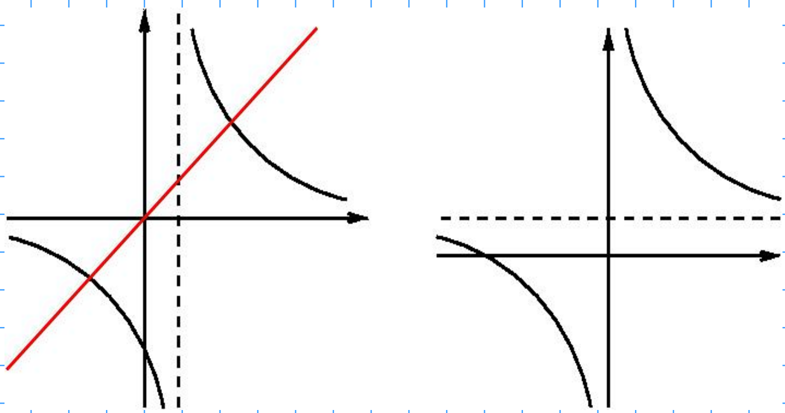


Die "Umkehrfunktion" (UF) einer Funktion erhält man, indem man die Gleichung

nach x auflöst, z.B

Funktion: UF:

Grafisch ist die UF einfach die Funktion, die sich durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den Ursprung ergibt, z.B.



Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von und stellen Sie diese grafisch dar

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion p(a) von und stellen Sie diese grafisch dar

Warnung: Nicht jeder Funktion ist eine eindeutige UF zugeordnet, z.B.

-> zu jedem $y>0$ gehören zwei x-Werte

also gibt es hier zwei UF:

-> Kapitel 2

1.5 Regeln 4: Rechnen mit Ungleichungen

Betrachten nun Ungleichungen, z.B. $2x<a$ oder $2x>a$. Es gelten die gleichen Umformungsregeln wie bei Gleichungen (siehe 1.3) mit einem Unterschied:

Beim Multiplizieren beider Seiten mit einer negativen Zahl wird aus ">" ein "<" und aus "<" ein ">".

Beispiel: Für welche x ist :

Für welche k ist ?

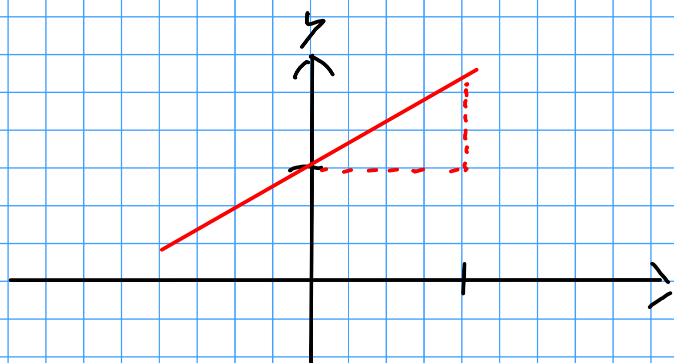
Für welche p ist ?

2) Die wichtigsten Funktionen

2.1 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen sind von der Form

Grafisch definieren diese Funktionen Geraden in der x-y-Ebene:



Man nennt a die "Steigung" der Geraden.

2.2 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen mit ganzzahligem positivem haben offenbar die Eigenschaften:

Man fordert nun, dass für mit beliebigem die gleichen Regeln gelten sollen. Speziell gilt:

andere Schreibweise:

Vorsicht mit den Vorzeichen:

i) gerade

Es gibt immer zwei n-te Wurzeln, denn

Konvention:

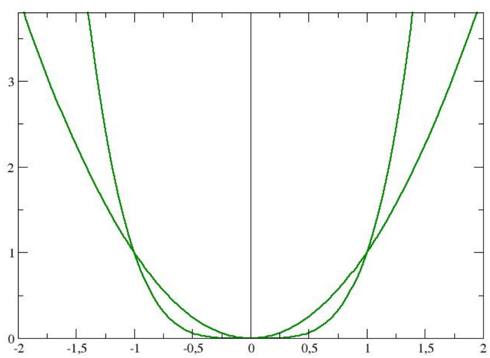
ii) ist im Allgemeinen nur definiert für x>0, Ausnahme:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich

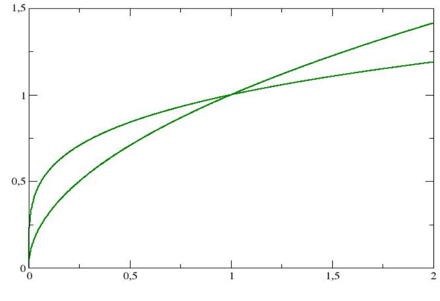
Lösen Sie die Gleichung

nach a auf.

Skizzieren Sie qualitativ in einem Koordinatensystem den Verlauf von und . Überlegen Sie zunächst, für welche x, oder ist.



Gleiche Aufgabe mit und



Zeigen Sie (durch Einsetzen), dass die quadratische Gleichung

durch

gelöst wird.

2.3 Quadratische Funktionen

Dienstag

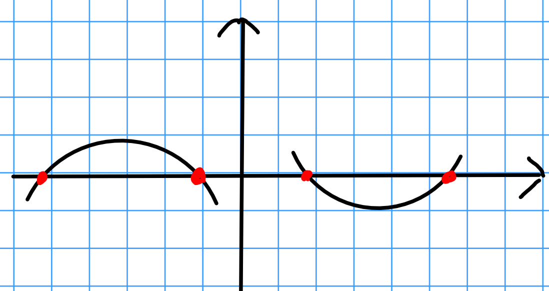
Eine "quadratische Funktion" ist von der Form

Ihre Nullstellen sind wegen der obigen "p-q-Formel"

Es gibt 3 Fälle:

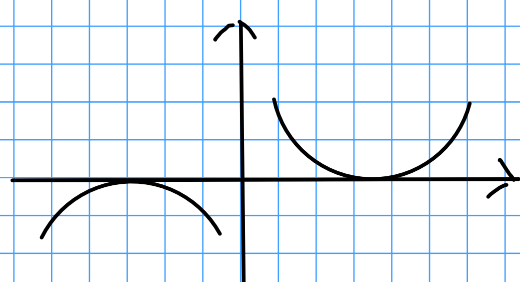
i) $Q>0$

2 Nullstellen



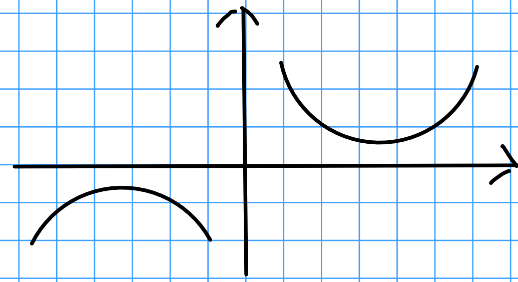
ii) $Q=0$

1 Nullstelle



iii) Q<0

keine Nullstelle

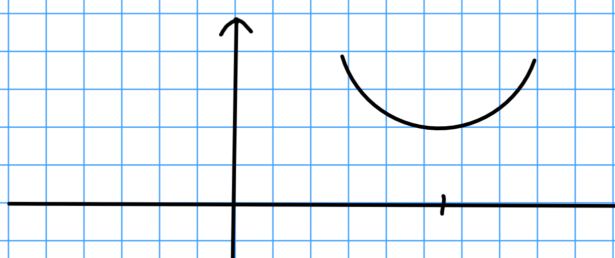


Zeigen Sie (durch Ausmultiplizieren), dass sich jede quadratische Funktion

auch immer scjreiben lässt als ("Scheitelform")

wobei

Vorteil der Scheitelform:
Man sieht sofort, wie die quadratische Funktion aussieht

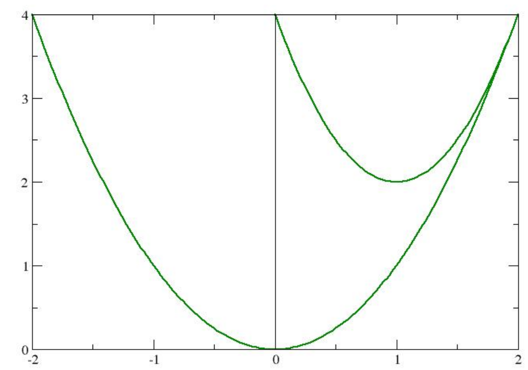


D.h. ist die Position des Minimums (a>0) oder des

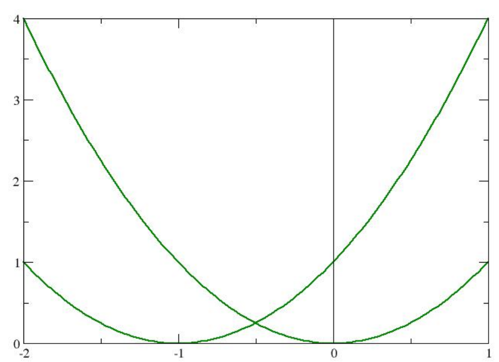
Maximums (a<0).

Skizzieren Sie die Funktionen

und bestimmen Sie ihre Schnittpunkte



Gleiche Aufgaben mit



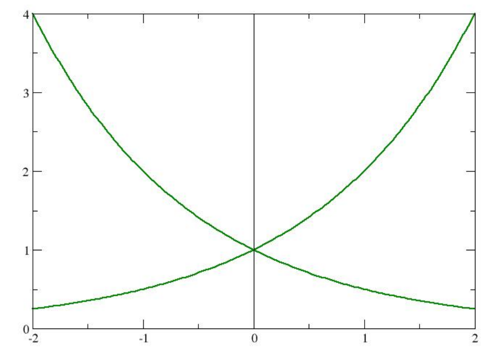
2.4 Exponentialfunktionen

Eine "Exponentialfunktion" ist von der Form

Es wird also der Exponent x als Variable und die "Basis" a als konstant angesehen.

Rechenregeln: wie bei Potenzfunktionen

Qualitativer Verlauf:



Die in der Physik wichtigste Basis ist die "Euler'sche Zahl"

Grund: Kapitel 6

Hinweis: Man schreibt auch oft

Man definiert die sogenannten "Hyperbelfunktionen"

Zeigen Sie, dass

Zeigen Sie, dass

2.5 <u>Die Logarithmusfunktionen</u>

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion

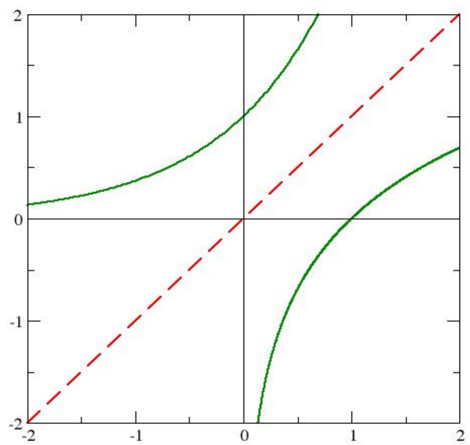
ist die "Logarithmusfunktion"

Konvention:

Wenn a=10 ist, schreibt man

Wenn a=e ist, schreibt man

Grafischer Verlauf:



also: Definitionsbereich von :

Rechenregeln:

i)

denn, sei

ii) Zeigen Sie analog, dass

Sei wieder

iii) Zeigen Sie, dass

Vereinfachen Sie

Vereinfachen Sie

2.6 Nachtrag zu 1.3

In 1.3 hatten wir erlaubte Umformungen der beiden Seiten einer Gleichung besprochen. Nun können wir weitere formulieren:
Die Gleichung

hat die gleiche Lösung wie

oder

oder

Also:
Man darf zur Lösung einer Gleichung auf beiden Seiten beliebige Potenzen bilden, Exponenzieren, oder Logarithmen bilden (sofern die Vorzeichen dies erlauben)
Beispiel:
Lösen die Gleichung

Lösen Sie

nach x auf

Lösen Sie

nach x auf

Lösen Sie

nach x auf

Lösen Sie

nach x auf

3 Lineare Gleichungssysteme

In der Physik sehr wichtig sind "lineare Gleichungssysteme" (LGS), d.h. Mengen von m linearen Gleichungen für n Variablen

z.B.

LGS1:

oder

LGS2:

Schreibt man das LGS in dieser Form (also links die Variablen und rechts die Zahlen), dann unterscheidet man

i) "homogene LGS": rechte Seiten alle $=0$, z.B. LGS2

ii) "inhomogene LGS": rechte Seiten nicht alle $=0$, z.B. LGS1

3.1 Einsetzungsverfahren

Wir lösen LGS mit Hilfe des "Einsetzungsverfahrens":

i) Man nimmt eine der Gleichungen und drückt eine Variable durch die anderen aus, z.B. LGS1:

ii) Setze diesen Ausdruck in die anderen Gleichungen ein

LGS mit einer Gleichung/Variable weniger

z.B. LGS1:

iii) zurück zu i) bis keine Gleichung mehr übrig ist

iv) Zum Schluss alle Lösungen rückwärts einsetzen

z.B. LGS1:

Lösen Sie das LGS

3.2 Homogene LGS

Allgemeine Aussagen:

i) Ein homogenes LGS hat immer die "triviale Lösung"

ii) Gibt es eine nicht triviale Lösung, so immer unendlich viele, da man eines Lösung eines homogenen LGS immer mit einer beliebigen Zahl multiplizieren kann
Beispiel:

Lösen Sie

Lösen Sie

3.3 Inhomogene LGS

Ein inhomogenes LGS kann keine, eine oder unendlich viele Lösungen haben:

Lösen Sie

Lösen Sie

Lösen Sie

3.4 Grafische Interpretationen (in zwei Dimensionen)

Die Lösung einer linearen Gleichung (mit 2 Variablen)

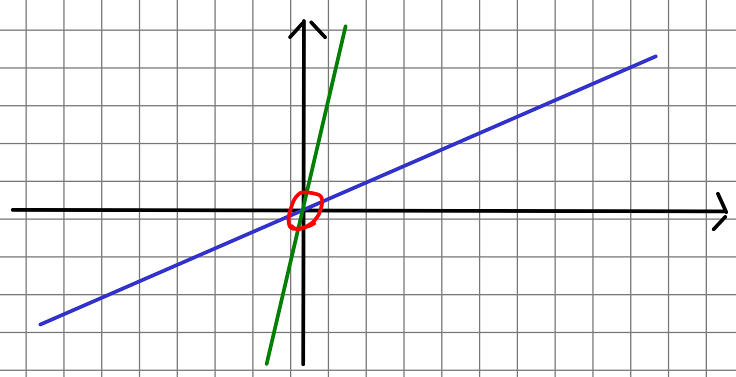
entspricht den Punkten auf einer Geraden in der x-y-Ebene

Die Lösung von zwei solchen Gleichungen sind dann die Schnittpunkte dieser beiden Geraden

i) homogene LGS

zwei Geraden durch den Ursprung

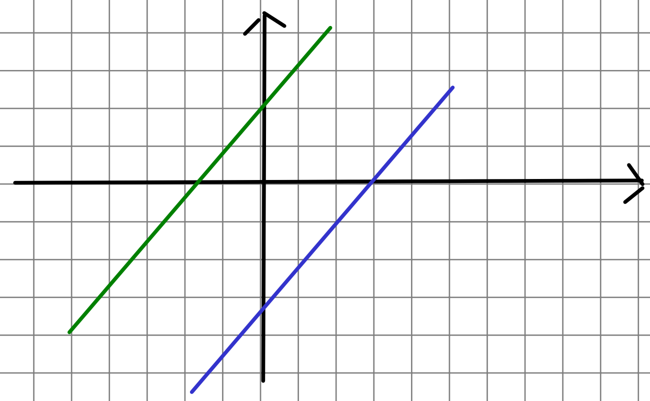
Fall 1:



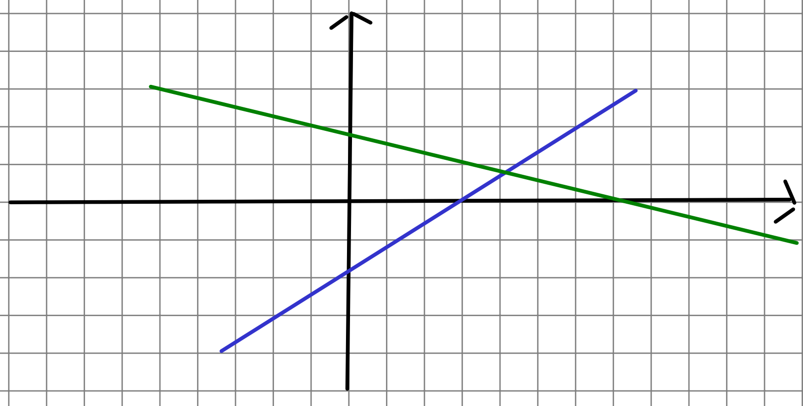
Fall 2:

ii) inhomogene LGS

Fall 1: Die Geraden sind parallel, aber verschieden



Fall 2: Die Geraden schneiden sich in einem Punkt



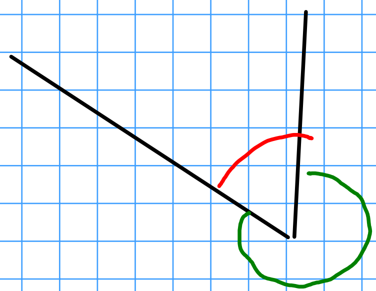
Fall 3: Die Geraden sind identisch

4) Elementare Geometrie

Mittwoch

4.1 Winkel

Zwei sich schneidende Halbgeraden definieren zwei Winkel



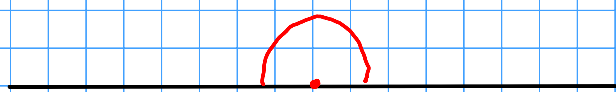
Gebräuchlich sind zwei Maße

Grad:

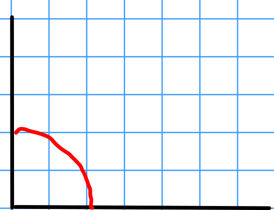
Bogenmaß:

Spezielle Winkel:

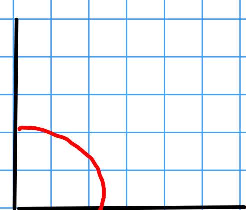
i)



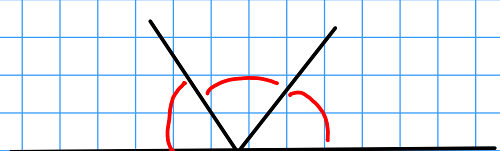
ii)



$\hat{=}$

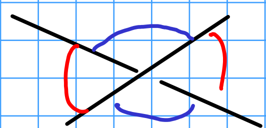


iii)

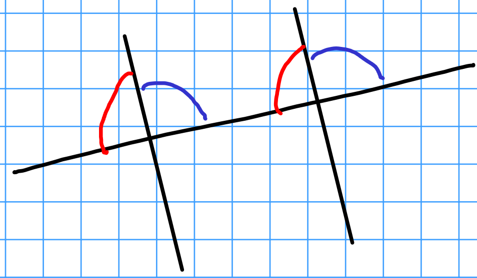


Einfache Beziehungen:

i) Schnitt von zwei Geraden:

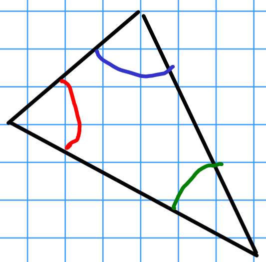


ii) Schnitt einer Geraden mit 2 parallelen Geraden:

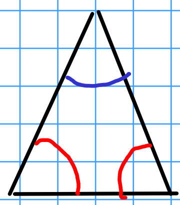


iii) Regeln in Dreiecken:

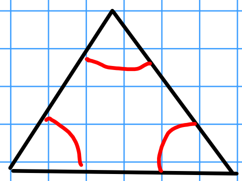
- beliebiges Dreieck



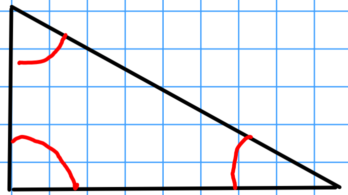
- gleichschenkliges Dreieck (2 gleich lange Seiten)



- gleichseitiges Dreieck:

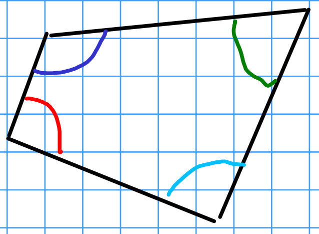


- rechtwinkliges Dreieck:

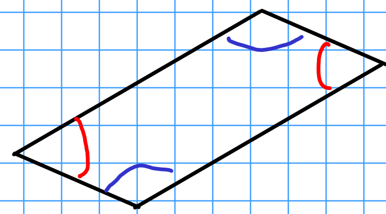


iv) Regeln in Vierecken

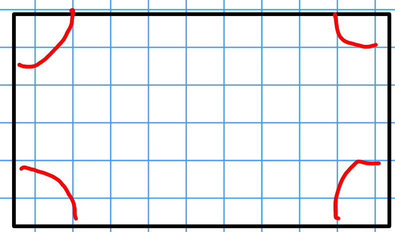
- beliebiges Viereck



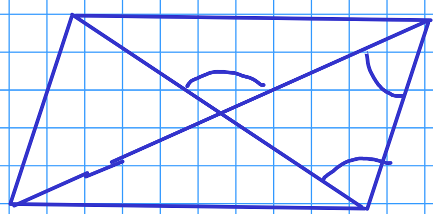
- Parallelogramm



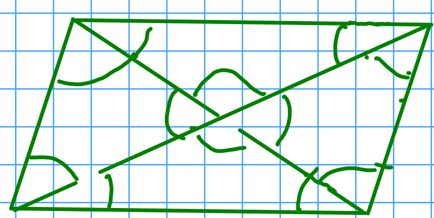
- Rechteck



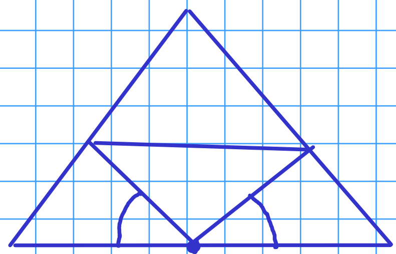
Betrachten ein Parallelogramm



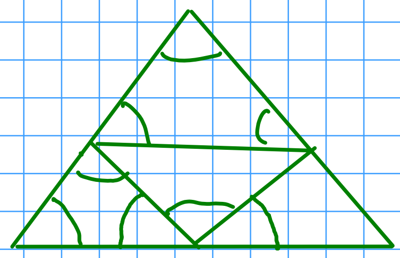
Welche der 12 Winkel im Inneren sind identisch und welche Beziehung besteht zwischen ?



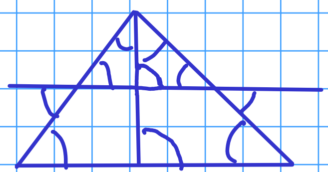
Betrachten ein gleichseitiges Dreieck



Welches der vier inneren Dreiecke ist gleichseitig, gleichschenklig oder rechtwinklig?

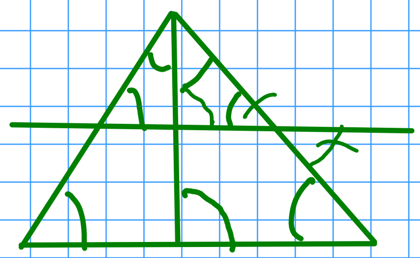


Welche der Winkel sind mit Sicherheit gleich ?

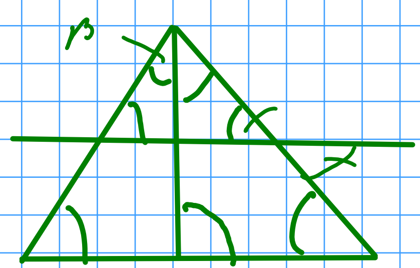


wenn das Dreieck i) beliebig
ii) rechtwinklig (oben) ist

i) beliebig:

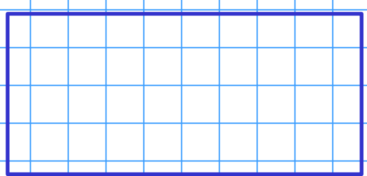


ii) rechtwinklig:

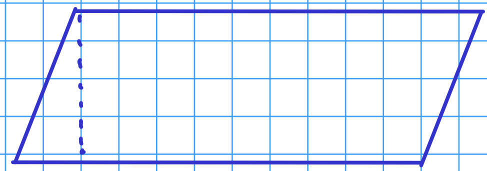


4.2 Flächeninhalte

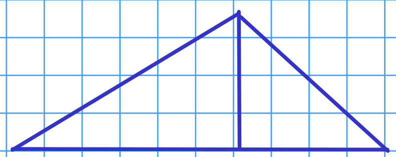
Rechteck:



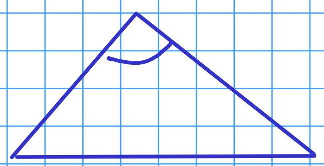
Parallelogramm



Dreieck:



4.3 Rechtwinklige Dreiecke

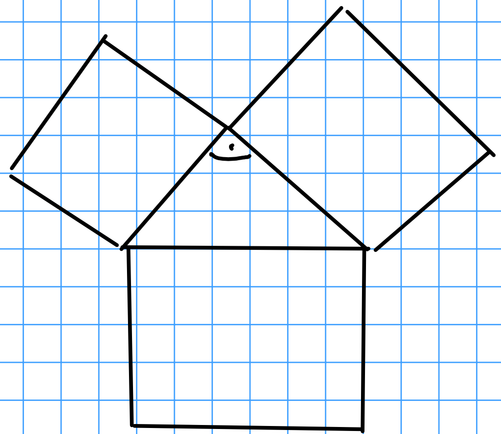


Satz von Thales:

Ein Dreieck ist genau dann rechtwinklig, wenn auf dem Kreis liegt, für den die Seite c ein Durchmesser ist.

Satz des Pythagoras:

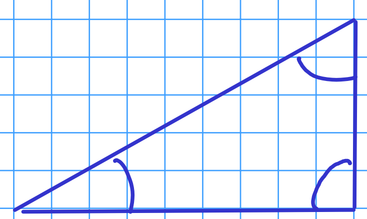
In dem obigen rechtwinkligen Dreieck ist



Es sei und . Bestimmen Sie a,b,c

4.4 Trigonometrische Funktionen

Für ein rechtwinkliges Dreieck definiert man



Eigenschaften:

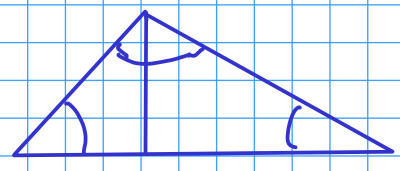
i)

ii)

iii)

1. Anwendung: "Sinussatz"

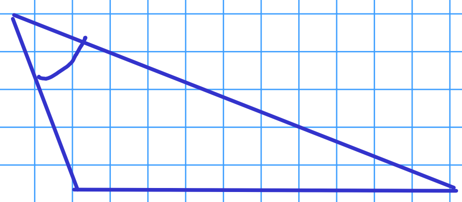
Gegeben ein beliebiges Dreieck



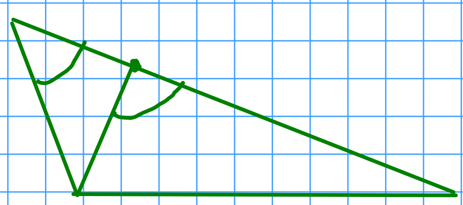
Zeigen Sie, dass

2. Anwendung: "Kosinussatz"

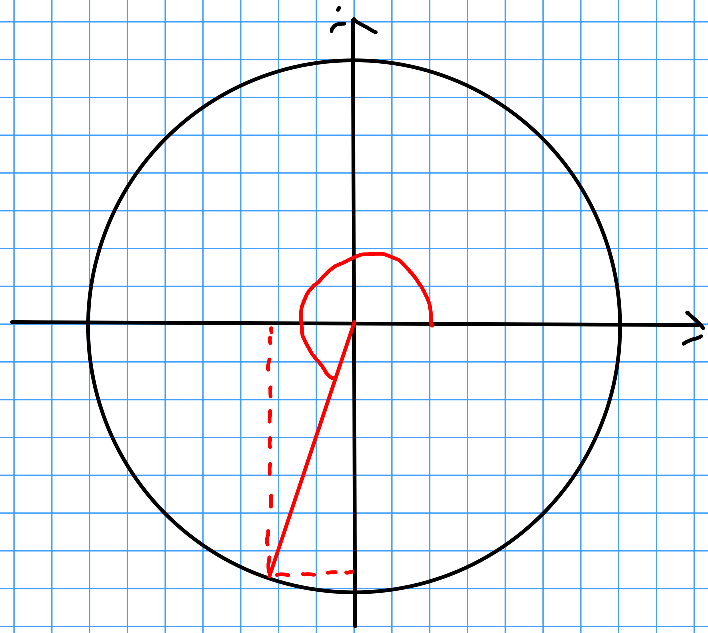
Gegeben ein beliebiges Dreieck



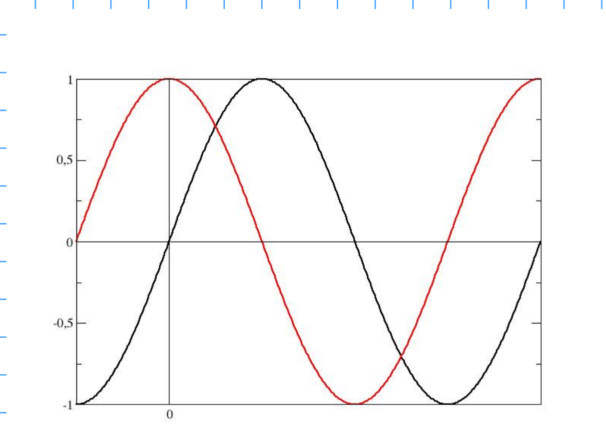
Zeigen Sie, dass

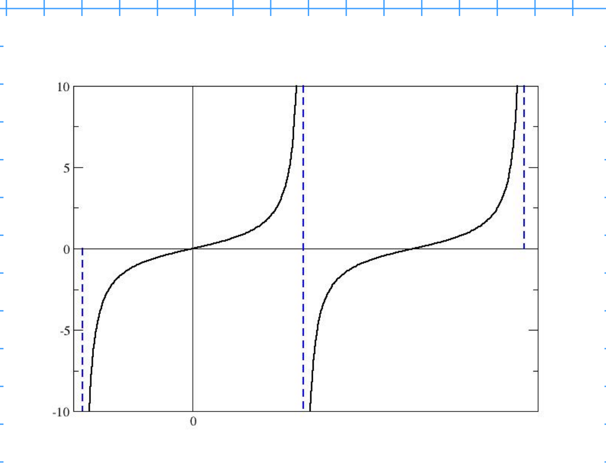


Verallgemeinerung auf beliebige Winkel: Einheitskreis



Grafisch:





Es gibt eine Reihe weiterer Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen, z.B. die "Additionstheoreme":

Alle weiteren: siehe Formelsammlung (z.B. Bronstein)

Zeigen Sie mit (1)/(2), dass

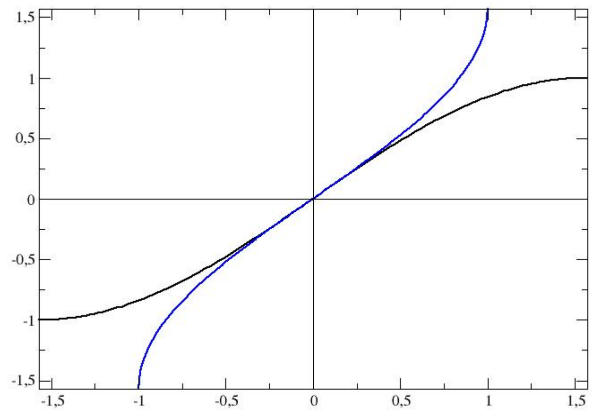
Zeigen Sie mit (1)/(2), dass

Zeigen Sie, dass

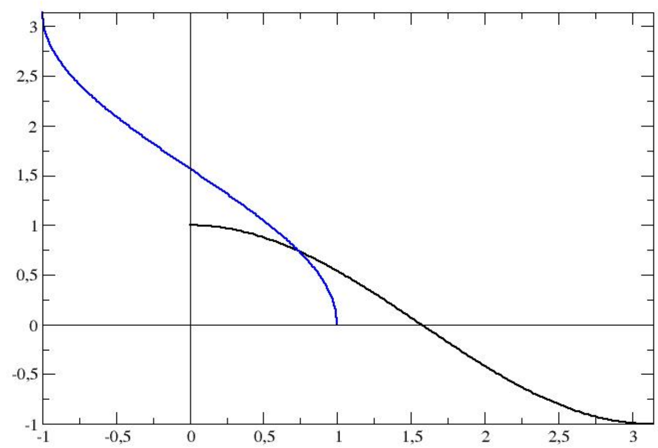
4.5 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind offenbar nur in endlichen Winkelintervallen eindeutig umkehrbar

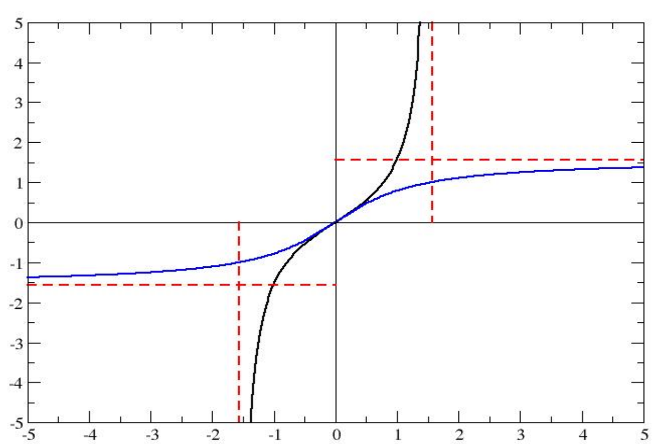
i)


1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5

ii)


3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3

iii)


5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Anwendung:

Lösung von Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen, z.B.:

Lösen Sie die Gleichung

Bestimmen Sie x:

5) Vektorrechnung

Donnerstag

5.1 Definitionen und erste Anwendungen

Ein "n-dimensionaler Vektor" ist eine n-elementige Spalte von Zahlen

Man definiert:

i) die Addition zweier Vektoren

ii) die Multiplikation mit einer Zahl

Damit ergeben sich ähnliche Regeln wie für Zahlen:

i) Vertauschungsgesetz:

ii) Klammerregeln:

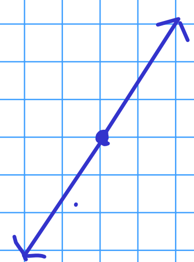
Grafische Interpretation: Vektorpfeile

z.B. in 2 Dimensionen:

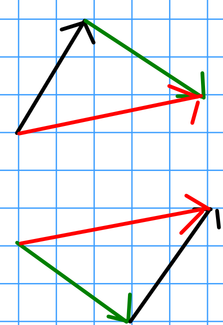
Dann ist

i) ein Pfeil in gleicher Richtung, aber um den Faktor

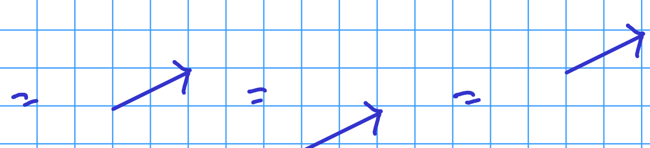
Wenn , wird die Richtung umgedreht



ii) Addition von zwei Vektoren

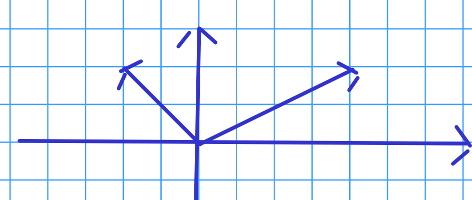


In dieser Interpretation ist also jedem Vektor ein bestimmter Pfeil definierter Länge und Richtung zugeordnet (d.h. mit einem beliebigen Anfangspunkt)

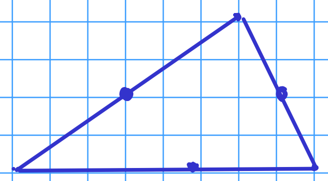


In der Physik besonders wichtig sind Ortsvektoren:

Wählt man ein bestimmtes Koordinatensystem, so ist jedem Ort im Raum ein eindeutig definierter Ortsvektor zugeordnet üblicherweise mit bezeichnet

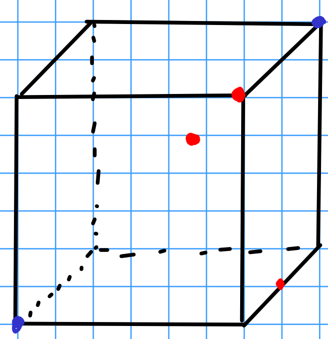


Gegeben das Dreieck



Bestimmen Sie die Ortsvektoren der Mittelpunkte der Seiten

Gegeben der Würfel



Bestimmen Sie die Ortsvektoren der roten Punkte

Gegeben die Vektoren und . Für welche ist

Ausgeschrieben

5.2 Das Skalarprodukt

Das "Skalarprodukt" zweier Vektoren

ist definiert als

Die Länge (oder der Betrag) eines Vektors ist dann

Berechnen Sie für

Rechenregeln:

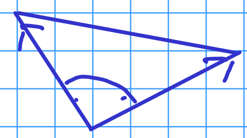
i) Vertauschungsgesetz:

ii) Klammern:

Vorsicht: macht keinen Sinn, sondern nur

Zum Beispiel in 2 Dimensionen:

Der Kosinussatz besagte



(1)

Andererseits ist

In der Physik werden Sie oft "abstrakt" mit Vektoren rechnen, also ausschließlich unter Verwendung der Rechenregeln, Beispiele:

Welchen Winkel schließen zwei Vektoren ein, wenn gilt

und seien normiert ( ) und schließen den Winkel ein. Welchen Winkel schließen die folgenden Vektoren

5.3 Lineare Unabhängigkeit, Basen

Eine Menge von d Vektoren

heißt "linear unabhängig", wenn die Gleichung

nur die "triviale Lösung" besitzt. In diesem Fall kann man keinen der Vektoren durch die anderen ausdrücken. Gibt es eine nicht triviale Lösung, so heißen die Vektoren "linear-abhängig". z.B. d=2:

Angenommen, und sind linear abhängig. Dann ist

D.h. zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie die gleiche Richtung habe, sonst linear unabhängig

Prüfen Sie, ob

linear unabhängig sind

Prüfen Sie, ob

linear unabhängig sind

Es gilt allgemein:

i) Bei n-dimensionalen Vektoren kann man maximal n-elementige Mengen von linear unabhängigen Vektoren finden, d.h eine Menge von mehr als n Vektoren ist immer linear abhängig

ii) Eine n-elementige Menge linear unabhängiger n-dimensionaler Vektoren nennt man "Basis"

Grund: Jeder andere Vektor kann dann immer als "Linearkombination"

(1)

geschrieben werden.

ii) Besonders praktisch sind "Orthonormalbasen" (ONB) , für die gilt

Einfachste ONB ist die kartesische Basis

Bei einer ONB kann man die in (1) leicht ausrechnen

D.h. man muss kein LGS lösen, um die zu bestimmen

Beispiel:

ONB:

Entwickel in dieser Basis:

Entwickeln Sie den Vektor in der gleichen Basis

Zeigen Sie, dass

eine ONB ist und entwickeln Sie in diese.

5.4 Das Kreuzprodukt

Für frei-dimensionale Vektoren definiert man das "Kreuzprodukt" (oder auch "Vektorprodukt")

Berechnen Sie

Berechnen Sie

Eigenschaften:

i)

ii)

iii)

iv)

v)

Zeigen Sie, dass

Zeigen Sie, dass

Zeigen Sie (ohne Verwendung von Spaltenvektoren, d.h. nur mit i)–v)), dass

Für welche Vektoren

ist

5.5 Beschreibung drei-dimensionaler Objekte

5.5.1 Geraden

In Kapitel 3 hatten wir eine Gerade beschrieben durch

Eine Verallgemeinerung auf drei Dimensionen wären die 2 Gleichungen

Für das praktische Rechnen sind beide Darstellungen ungeeignet. Besser ist immer eine "Parameter-Darstellung"

mit beliebigen Vektoren . Oder Geradenstück

Schnitte von Geraden:

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von mit

5.5.2 Ebenen

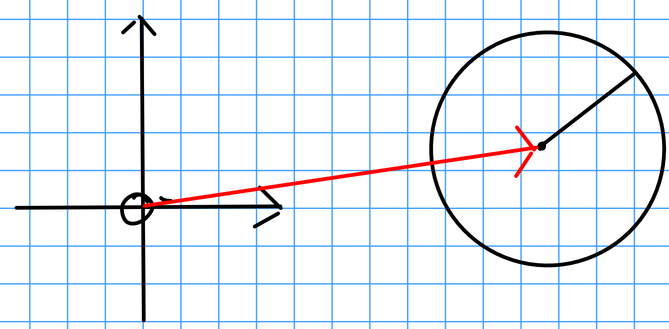
Parameterdarstellung:

Schnitte von Ebenen:

3 Gleichungen für 4 Variablen (wenig Relevanz in der Physik)

5.5.3 Kugeln, Zylinder

In kartesischen Koordinaten:



Dies ist eine sehr unpraktische Darstellung. Besser sind Kugelkoordinaten

mit

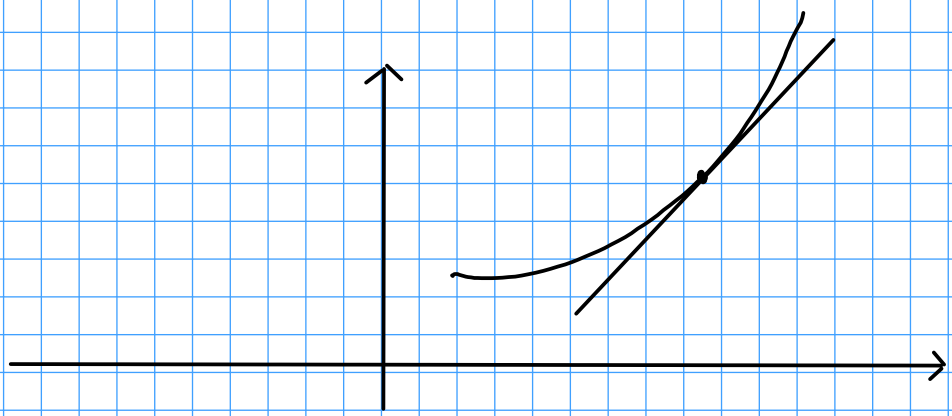
Analog: Zylinderkoordinaten, siehe Vorkurs oder PI/ExpI

6 Differentialrechnung

Freitag

6.1 Rechenregeln

Die (erste) Ableitung einer Funktion an der Stelle x ist die Steigung der Tangente an dieser Stelle



Saubere Definition: Vorkurs oder Vorlesung HöMä 1

alternative Schreibweisen:

Ableitungen der bisher eingeführten Funktionen:

i)

ii)

iii)

iv)

v)

Rechenregeln:

i) Summen:

Die Ableitung von ist

Wir hatten bereits eingeführt

Was ist

Was ist

ii) Produktregel

Die Ableitung von

ist

z.B.

Bestimmen Sie

Bestimmen Sie

iii) Quotientenregel:

Die Ableitung von

ist

Bestimmen Sie die Ableitung von

sowohl mit Produkt- als auch Quotientenregel

Verifizieren Sie die Ableitungsregel für

iv) Kettenregel

Eine Funktion der Form

hat die Ableitung

Beispiel:

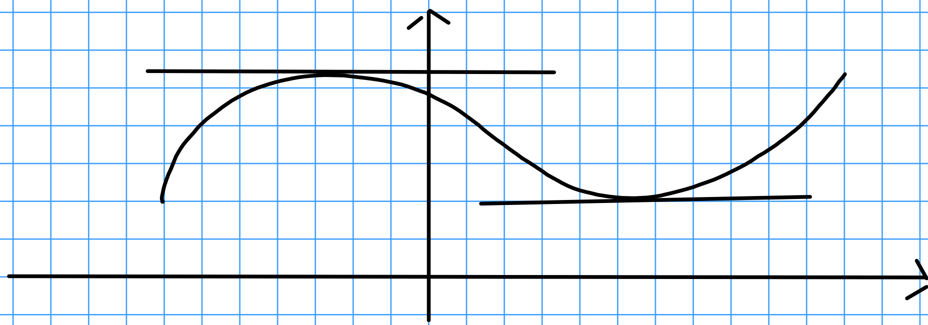
Berechnen Sie die Ableitung von

Berechnen Sie die Ableitung von

Berechnen Sie die Ableitung von

6.2 Anwendung: Bestimmung von Extrema

Hat eine Funktion ein Maximum oder Minimum, z.B.

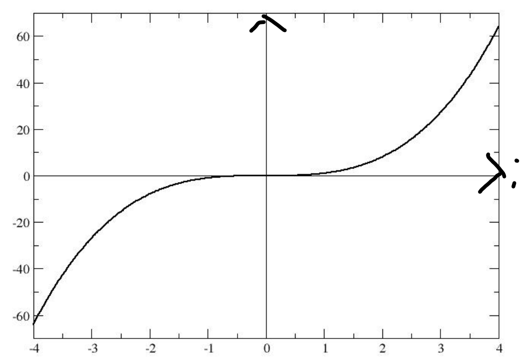


so ist die Ableitung an dieser Stelle gleich 0

z.B.:

aber: ist nur eine notwendige Bedingung, d.h. es muss nicht zwingend ein Extremum vorliegen.

Standard-Gegenbeispiel:



aber: kein Extremum bei x=0,
sondern ein "Sattelpunkt"

Hinreichendes Kriterium über zweite Ableitung

Es gilt:

Maximum bei , wenn

Minimum bei , wenn

Falls , ist die Lage weiter unklar

Bestimmen Sie das Extremum von

Bestimmen Sie das Extremum von

Bestimmen Sie das Extremum von